ΑΣΚΗΣΗ 1η

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ) X δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot x^{-3/2}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \quad a>0$$

α) Να υπολογισθεί η τιμή της σταθεράς a

β) Να προσδιοριστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X

γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(1/2 \leq X < 3)$

ΛΥΣΗ

α) Αφού είμαστε σε συνεχή μεταβλητή, τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^{\infty} a \cdot x^{-3/2}\,dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \int_1^{\infty} x^{-3/2}\,dx = 1 \Leftrightarrow a \cdot \left[\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^{\infty} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^{\infty} = 1 \Leftrightarrow -2a \cdot \left[1/\sqrt{x}\right]_1^{\infty} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} > 0$$

β) $$F_X(x) := P(X \leq x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0, & x<1 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f_X(t)\,dt + \int_1^x f_X(t)\,dt = \end{cases}$$

$$= \int_1^x \frac{1}{2} \cdot t^{-3/2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^x =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \left(x^{-1/2} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1$$

ΔΗΛΑΔΗ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}$$

γ) $$P\left(\frac{1}{2} \leq X < 3\right) = F_X(3) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

α) Να ελεγχθεί εαν η συνάρτηση,

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^3/27, & 0\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

μπορεί να παριστά την ασk μιας συνεχούς τ.μ. Αν, ναι τότε να βρεθεί η σππ της τ.μ.

β) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες

$P(|x|\le \frac{3}{2})$, $P(x\ge 1)$ & $P(\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2})$

ΛΥΣΗ

α) Εξετάζουμε, τις ιδιότητες της ασk

- F είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,3]$.
  $x_1\le x_2 \Rightarrow \{X\le x_1\}\subseteq\{X\le x_2\}\Rightarrow F_X(x_1)\le F_X(x_2)$
- F είναι συνεχής από τα δεξιά
  $\lim\limits_{x\to 3^+} F_X(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^3}{27}=1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} F_X(x)=0$ & $\lim\limits_{x\to +\infty} F_X(x)=1$

$$\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/9, & x\ge 0 \end{cases}$$

β) • $P(|x|\le \frac{3}{2})=P(-\frac{3}{2}\le x\le \frac{3}{2})=\int_{-3/2}^{3/2} f_X(x)\,dx=$

$=\int_{-3/2}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{3/2} f_X(x)\,dx=\int_0^{3/2} x^2/9\,dx=$

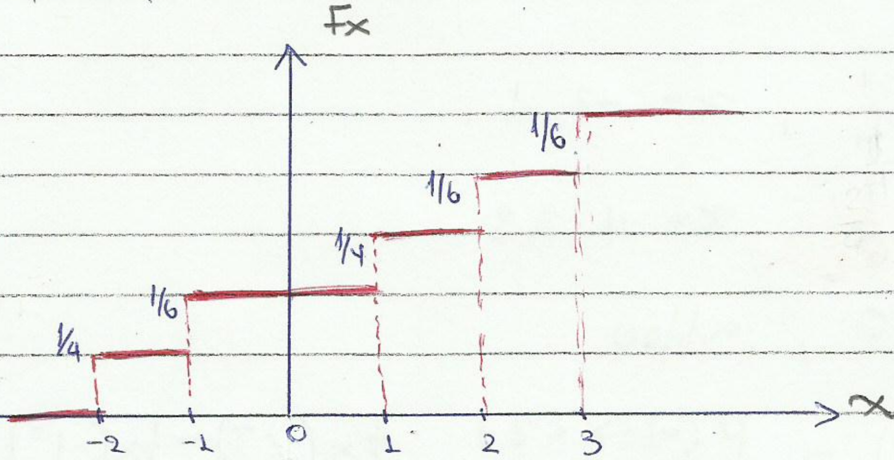
$=\left[x^3/27\right]_0^{3/2}=\frac{1}{8}$

• $P(x\ge 1)=1-P(x<1)=1-F_X(1)=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$

• $P(\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2})=F_X(\frac{5}{2})-F_X(\frac{1}{2})=0{,}57.$

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τμ X δίνεται από το ακόλουθο σχήμα:



α) Είναι η τμ X συνεχής ή διακριτή; Να αιτιολογηθεί η απάντηση

β) Να προσδιοριστεί η σπ ή σππ (ανάλογα από το (α)) και να σχεδιαστεί

γ) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \geq -1 / X < 2)$ και να εξεταστεί εάν τα ενδεχόμενα, $A = \{X<2\}$ & $B = \{X \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητα

ΛΥΣΗ

α) Πρώτα από όλα, είναι προφανές ότι είναι διακριτή τ.μ. (από σχήμα σχήμα οι τιμές της X "κόβονται"

Από σχήμα βγαίνει επίσης ο τύπος της Fx:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/4, & -2 \leq x < -1 \\ 10/24, & -1 \leq x < 1 \\ 2/3, & 1 \leq x < 2 \\ 5/6, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Προφανώς, δεν είναι συνεχής διότι $\forall x$, δεν πληρείται ο ορισμός της συνέχειας σε σημείο

β)
- $P(X=-2) = F_X(-2) - F_X(-2^-) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$
- $P(X=-1) = F_X(-1) - F_X(-1^-) = \frac{10}{24} - \frac{1}{4} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- $P(X=1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{10}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

- $P(X=2) = F_X(2) - F_X(2^-) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.
- $P(X=3) = F_X(3) - F_X(3^-) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Άρα, $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = -2, 1 \\ \frac{1}{6}, & x = -1, 2, 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

γ) $P(X \geq -1 \mid X<2) = \frac{P(-1 \leq X < 2)}{P(X<2)} = \frac{F_X(2^-) - F_X(-1^-)}{F_X(2^-)} =$

$= \frac{2/3 - 1/4}{2/3} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Επί, εξετάζουμε εάν τα A & B ανεξάρτητα

$P(A) = P(X<2) = \frac{2}{3}$ & $P(X \geq 1) = P(X=1 \text{ ή } X>1)$

$= P(X=1) + P(X>1) =$

$= \frac{1}{4} + 1 - P(X \leq 1) =$

$= \frac{1}{4} + 1 - F_X(1) =$

$= \frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{15-8}{12} = \frac{7}{12}$

Επί, $P(A \cap B) = P(X<2 \ \& \ X \geq 1)$

$= P(1 \leq X < 2) =$

$= -F_X(1^-) + F_X(2^-) =$

$= -\frac{10}{24} + \frac{2}{3} = \frac{-10+16}{24} = \frac{6}{24}$

Αφού, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ Εξαρτημένα!!!